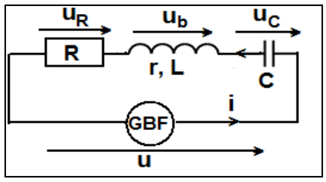
Résumé de cours — Le dipôle RLC en régime forcé

A l'aide d'un GBF, on établit **une tension sinusoïdale** aux bornes du dipôle RLC (formé de l'association en série d'un condensateur, une bobine et un résistor). La résistance totale du dipôle est $R_T = R + r$.

Sa pulsation propre est $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$ (en rad.s^{-1}) et son énergie totale est $\boxed{E = E_e + E_m = \frac{1}{2} C u_C^2 + \frac{1}{2} L i^2}$

☐ Réponse d'un dipôle RLC à une tension sinusoïdale $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$.

C'est le passage d'un courant sinusoïdal **de même pulsation ω** que la tension excitatrice u(t) (établie par le GBF).



L'équation différentielle : $L\frac{di}{dt} + (R+r)\,i + \frac{1}{C}\int i.dt = u$. Sa solution : $i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$

♦ **Impédances du dipôle RLC :**

$\boxed{Z = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I}}$ $(U = U_m/\sqrt{2})$ avec $\boxed{Z = \sqrt{(R+r)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$ $(Z \geq R + r)$.

♦ **Déphasage tension-courant :** $\Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i$: $\boxed{tg\Delta\varphi = \frac{L\omega - 1/C\omega}{R+r}}$ et $\boxed{\cos\Delta\varphi = \frac{R+r}{Z} > 0}$ $\left(-\frac{\pi}{2} < \Delta\varphi < \frac{\pi}{2}\right)$.

♦ **Impédances des dipôles :** $Z_R = R$; $Z_L = L\omega$; $Z_C = 1/C\omega$; $Z_b = \sqrt{r^2 + (L\omega)^2}$; $Z_{LC} = |L\omega - 1/C\omega|$.

♦ **Expressions des tensions :** $u_R = R\,i = U_{Rm}\sin(\omega t + \varphi_{uR})$ avec $U_{Rm} = R\,I_m$ et $\varphi_{uR} = \varphi_i$

$u_C = \frac{1}{C}\int i.dt = U_{Cm}\sin(\omega t + \varphi_{uC})$ avec $U_{Cm} = Z_C I_m = I_m/C\omega$ et $\varphi_{uC} = \varphi_i - \frac{\pi}{2}$

$u_b = r\,i + L\frac{di}{dt} = U_{bm}\sin(\omega t + \varphi_{ub})$ avec $U_{bm} = Z_b I_m = \sqrt{r^2 + (L\omega)^2}.I_m$ et $tg(\varphi_{ub} - \varphi_i) = \frac{L\omega}{r}$

♦ **Identification des sinusoïdes :** on a toujours $\boxed{U_{Rm} < U_m}$; $\boxed{\varphi_u - \varphi_{uC} > 0}$ et $\boxed{\varphi_u - \varphi_{ub} < 0}$

☐ Nature du circuit :

♦ Circuit inductif : $\omega > \omega_0$ (ou $L\omega > \frac{1}{C\omega}$) et $\Delta\varphi > 0$ (u en avance / i). $(0 < \Delta\varphi < \frac{\pi}{2})$

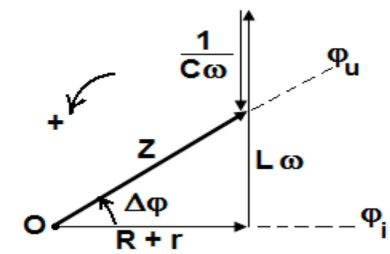
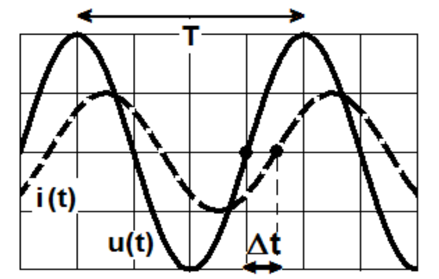


Diagramme des impédances $\omega > \omega_0$



u en avance / i ⇒ circuit inductif

Calcul de $\Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i$

$|\Delta\varphi| = \omega.\Delta t = \frac{2\pi}{T}.\Delta t$

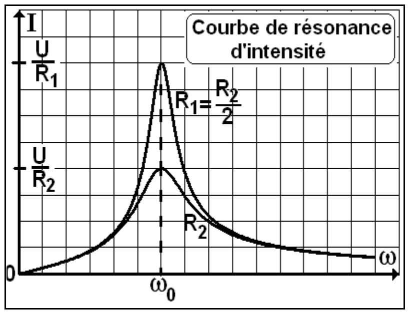
$\Delta t = \frac{T}{8}$ (décalage horaire)

D'où $|\Delta\varphi| = \pi/4$ rad.

u en avance/i ⇒ $\Delta\varphi > 0$

♦ Circuit capacitif : $\omega < \omega_0$ (ou $L\omega < \frac{1}{C\omega}$) et $\Delta\varphi < 0$ (u en retard / i). $(-\frac{\pi}{2} < \Delta\varphi < 0)$

♦ Circuit résistif : $\omega = \omega_0$ (ou $L\omega = \frac{1}{C\omega}$) et $\Delta\varphi = 0$ (u en phase avec i).



☐ Résonance d'intensité : $I_m(\omega) = U_m/Z$ est max ⇒ Z est min.

D'où : $\boxed{\omega = \omega_0}$, $\boxed{\Delta\varphi = 0}$ et $\boxed{Z = R + r}$.

Aussi : $u = (R+r)\,i$ et $E = cte = L I^2$ (E se conserve).

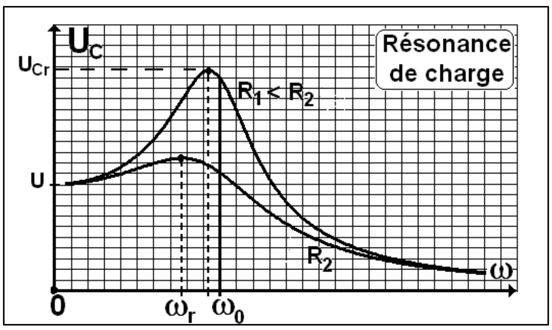
Facteur de surtension à la résonance : $\boxed{Q = U_C / U}$

$$Q = \frac{1}{(R+r)C\omega_0} = \frac{L\omega_0}{R+r} = \frac{1}{R+r}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Il y a surtension si $Q > 1$.

☐ Résonance de charge : $Q_m(\omega) = U_m/\omega Z$ est max ⇒

ωZ est min. D'où : $\omega = \omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - (R+r)^2/2L^2} < \omega_0$



☐ Puissance moyenne consommée par le dipôle RLC :

$\boxed{P = UI\cos\Delta\varphi = (R + r)\,I^2}$ (en W : watt).

♦ Energie consommée chaque période T : **W = P.T** (en J).

♦ $\cos\Delta\varphi = \frac{R+r}{Z}$ est le **facteur de puissance**.

Fiche : Résonance d'intensité i et résonance de charge q (ou de u_C)

Pour un dipôle RLC en régime forcé :

- On a une résonance d'intensité lorsque $I_m(\omega)$ prend sa valeur maximale si on fait varier ω.
- On a une résonance de charge lorsque $Q_m(\omega)$ (ou U_{Cm}) prend sa valeur maximale si on fait varier ω.

1ère méthode : On résout l'équation différentielle avec **la grandeur i** en utilisant la représentation de Fresnel.

Equation différentielle: $L\dfrac{di}{dt} + R_T\, i + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int i\, dt = u$. (avec $R_T = R + r$)

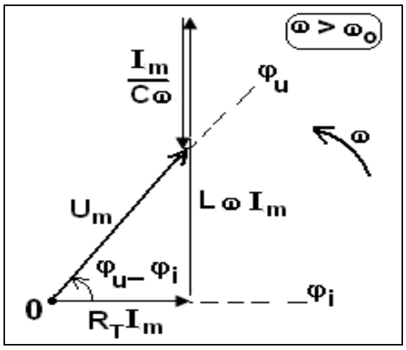
On a : $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$. Donc $i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$.

Représentation de Fresnel : $(R+r)\, i \longrightarrow \vec{V_1}\,(R_T I_m\,,\ \varphi_i)$

$L\dfrac{di}{dt} \longrightarrow \vec{V_2}\,(L\omega I_m\,,\ \varphi_i + \dfrac{\pi}{2})$

$\dfrac{1}{C}\displaystyle\int i\, dt \longrightarrow \vec{V_3}\,(I_m/C\omega\,,\ \varphi_q - \dfrac{\pi}{2})$

$u \longrightarrow \vec{V}\,(U_m,\ \varphi_u)$ avec $\vec{V} = \vec{V_1} + \vec{V_2} + \vec{V_3}$



Théorème de Pythagore : $I_m^{\,2}\,[R_T^{\,2} + (L\omega - 1/C\omega)^2] = U_m^{\,2} \Rightarrow \boxed{I_m = \dfrac{U_m}{\sqrt{R_T^2 + (L\omega - 1/C\omega)^2}}}$ $(I_m = U_m/Z)$

$q = \displaystyle\int i\, dt \Rightarrow Q_m = I_m/\omega = \dfrac{U_m}{\omega\sqrt{R_T^2 + (L\omega - 1/C\omega)^2}} \Rightarrow \boxed{Q_m = \dfrac{U_m}{\sqrt{R_T^2\,\omega^2 + (L\omega^2 - 1/C)^2}}}$ $(Q_m = U_m/Z\omega)$

2ème méthode : On résout l'équation différentielle avec **la grandeur q** en utilisant la représentation de Fresnel :

Equation différentielle: $L\dfrac{d^2q}{dt^2} + R_T\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{1}{C}q = u$ ou : $LC\dfrac{d^2u_C}{dt^2} + R_T C\dfrac{du_C}{dt} + u_C = u$

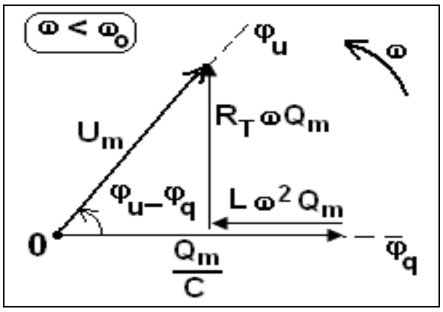
On a : $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$. Donc $q(t) = Q_m \sin(\omega t + \varphi_q)$.

Représentation de Fresnel : $1/C.\, q \longrightarrow \vec{V_1}\,(Q_m/C,\ \varphi_q)$

$R_T\dfrac{dq}{dt} \longrightarrow \vec{V_2}\,(R_T\,\omega\, Q_m\,,\ \varphi_q + \dfrac{\pi}{2})$

$L\dfrac{d^2q}{dt^2} \longrightarrow \vec{V_3}\,(L\,\omega^2 Q_m\,,\ \varphi_q + \pi)$

$u \longrightarrow \vec{V}\,(U_m\,,\ \varphi_u)$/ $\vec{V} = \vec{V_1} + \vec{V_2} + \vec{V_3}$



Théorème de Pythagore : $Q_m^{\,2}\,[R_T^{\,2}\,\omega^2 + (L\omega^2 - 1/C)^2] = U_m^{\,2} \Rightarrow \boxed{Q_m = \dfrac{U_m}{\sqrt{R_T^2\,\omega^2 + (L\omega^2 - 1/C)^2}}}$

$i = \dfrac{dq}{dt} \Rightarrow I_m = \omega\, Q_m = \dfrac{\omega\, U_m}{\sqrt{R_T^2\,\omega^2 + (L\omega^2 - 1/C)^2}} \Rightarrow \boxed{I_m = \dfrac{U_m}{\sqrt{R_T^2 + (L\omega - 1/C\omega)^2}}}$

1) Résonance d'intensité : $I_m(\omega)$ est maximale $\Rightarrow (L\omega - 1/C\omega)^2$ est minimale $\Rightarrow L\omega - 1/C\omega = 0$.

D'où : $L\omega = 1/C\omega \Rightarrow \boxed{\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}}$

On constate que **la résonance d'intensité** est obtenue pour **une pulsation $\omega = \omega_0$.**

A la résonance de i : $I_m = I_0 = U/R_T$. Plus R_T est grande, plus I_0 est faible mais $\omega = \omega_0$ ne change pas.

2) Résonance de charge : $Q_m(\omega)$ est maximale $\Rightarrow g(\omega) = R_T^{\,2}\,\omega^2 + (L\omega^2 - 1/C)^2$ est minimale.

D'où : $\dfrac{dg}{d\omega} = 0 \Rightarrow R_T^{\,2}.2\omega + 2\,(L\omega^2 - 1/C).\,2\omega L = 0 \Rightarrow R_T^{\,2} + 2L^2\omega^2 - 2L/C = 0 \Rightarrow \boxed{\omega = \omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \dfrac{(R+r)^2}{2.L^2}}}$

On constate que **la résonance de charge** est obtenue pour **une pulsation $\omega_r < \omega_0$**

$U_{Cm} = Q_m/C \Rightarrow U_C = \dfrac{U}{C\sqrt{R_T^2\,\omega^2 + (L\omega^2 - 1/C)^2}}$

Plus R_T est grande, plus ω_r est faible et plus U_{Cr} est aussi faible.

Remarque : Lorsque ω tend vers 0, alors U_{Cm} tend vers U_m (Q_m tend vers $C.U_{Cm}$) mais I_m tend vers 0.
Lorsque ω est très grande, alors U_{Cm} tend vers 0 et aussi I_m tend vers 0.